

- 1) Układem  $n$  równań liniowych z  $m$  niewiadomymi nazywamy układ równań:

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

gdzie  $\forall i, j : a_{ij} \in \mathbb{K}$  to współczynniki (dane, ustalone),  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : b_i \in \mathbb{K}$  to wyrazy wolne (dane, ustalone),  $\forall j \in \{1, \dots, m\} : x_j$  to niewiadome (szukane). Rozwiązaniem takiego układu  $(*)$  nazywamy każdą  $m$ -kę skalarów  $(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{K}^m$ , która spełnia wszystkie równania układu  $(*)$ .

- 2) Macierz  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$  nazywamy macierzą współczynników układu  $(*)$ , zaś macierz  $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{n \times 1}(\mathbb{K})$  kolumną wyrazów wolnych układu  $(*)$ . Natomiast macierz

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} & b_n \end{array} \right] \in \mathbf{M}_{n \times (m+1)}(\mathbb{K})$$

nazywamy macierzą uzupełnioną układu  $(*)$ .

- 3) Układ  $(*)$  nazywamy **układem Cramera** jeżeli jest układem kwadratowym, tzn.  $n = m$  oraz  $\det A \neq 0$ . Jeżeli układ  $(*)$   $A \cdot X = B$  jest układem Cramera, to jest oznaczony oraz jedyne jego rozwiązanie zadane jest poprzez tzw. wzory Cramera:

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} : x_j = (\det A)^{-1} \cdot \det A_{x_j},$$

gdzie  $A_{x_j}$  powstaje z  $A$  przez zastąpienie  $j$ -tej kolumny kolumną wyrazów wolnych  $B$ .

- 4) Układ  $(*)$  posiada co najmniej 1 rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy  $r(A) = r([A|B])$ .
- 5) Układ  $(*)$  jest sprzeczny  $\Leftrightarrow r(A) \neq r([A|B])$ , a tak naprawdę  $r(A) < r([A|B])$ .
- 6) Jeśli  $r(A) = r([A|B]) = r = m =$  ilość niewiadomych (ilość kolumn w  $A$ ), to układ  $(*)$  jest oznaczony.
- 7) Jeśli  $r(A) = r([A|B]) = r < m$ , to układ  $(*)$  jest układem nieoznaczonym i jego rozwiązania zależą od  $(m - r)$  parametrów.
- 8) Układy jednorodne, tzn. takie, dla których  $B = \bar{0}$ , są zawsze niesprzeczne, a gdy są oznaczone, to jedynym rozwiązaniem jest  $(\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})$ .
- 9) **Uwaga!** Gdy w układzie kwadratowym  $\det A = 0$  oraz  $\forall x_i : \det A_{x_i} = 0$ , to układ może być nieoznaczony lub sprzeczny.

**Zadanie 1.** W zależności od wartości parametru  $p \in \mathbb{R}$  wyznacz rząd macierzy:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} p-1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & p+1 \\ p & p & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 1-p & 2 & p+1 & -2 \\ p+1 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & p+1 & 4 & -2 \\ 3 & 4 & p+3 & -2 \end{bmatrix}, \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 2 & -1 & p-1 & 1 & 1 \\ p & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & p-3 \\ 1 & p & 3 & -1 & -4 \end{bmatrix},$$

**Zadanie 2.** Rozwiąż układy równań:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} x+y+z=0 \\ 3x-y+2z=1 \\ -x-4y-3z=-3, \end{cases} & \text{b) } & \begin{cases} -3x-3y+2z=2 \\ x-4y-3z=-4 \\ -2x+2y+4z=-8, \end{cases} & \text{c) } & \begin{cases} -2x-3y+z=1 \\ -4x-6y+2z=3, \end{cases} \\ \text{d) } & \begin{cases} 2x-y+z=-1 \\ z+2y-3z-t=-1 \\ 3y+z-2t=-1 \\ -x-y+z+t=-1, \end{cases} & \text{e) } & \begin{cases} 2x-y+z-t=2 \\ -x+y+z-3t=-13 \\ -2x+3y+z+2t=3, \end{cases} & \text{f) } & \begin{cases} -3x+2y-z+4t=-5 \\ -x-3y-2z-t=-2 \\ x+y+z=2 \\ -x-2y-3z+4t=1. \end{cases} \\ \text{g) } & \begin{cases} 2x-3y-5z=5 \\ -x+y-z=-5 \\ -3x-4y-3z=-1 \end{cases} & \text{h) } & \begin{cases} 2x-y-3z+4t=-5 \\ -3x-2y-z-t=-2 \\ -x+y+2z-3t=3 \\ x+y+z=2 \\ -2x-3y-z+4t=0 \end{cases} & \text{i) } & \begin{cases} 2x+y-z+2t-u=3 \\ 2x-y+z-2u=4 \\ 3x-2y+2z+t-3u=5 \\ -3x-3t+2u=-4 \end{cases} \end{aligned}$$

**Zadanie 3.** Zbadaj istnienie rozwiązania układów ze względu na parametry. Jeśli rozwiązanie istnieje, wyznacz je.

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} -x+ky+2z=k \\ (k+1)x+y+z=1 \\ 2x+(k-1)y+z=k-1, \end{cases} & \text{b) } & \begin{cases} ax+y+2z=-a \\ -x+y+2z=b \\ 2x+y+(a-1)z=a+3, \end{cases} & \text{c) } & \begin{cases} px+y+z=4 \\ x+qy+z=3 \\ x+2(q-1)y+z=4, \end{cases} \\ \text{d) } & \begin{cases} x+y+z+at=a^3 \\ x+y+az+t=a^2 \\ x+ay+z+t=a \\ ax+y+z+t=1, \end{cases} & \text{e) } & \begin{cases} m^2x-2y+z=m \\ x-2y+2mz=1, \end{cases} & \text{f) } & \begin{cases} x+ky-z=1 \\ x+y+kz=2 \\ kx+y+z=l, \end{cases} \\ \text{g) } & \begin{cases} (k-1)x-y+(2-k)z=k+1 \\ mx+(m-1)y-2z=m \\ -y+kz=-k, \end{cases} \end{aligned}$$